Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dip. di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica Generale

Valore Assoluto

Anno Accademico 2013/2014

V. Lacagnina - S. Piraino

Homines, dum docent, discunt
Quando insegnano, gli uomini imparano
SENECA

Realizzazione e sviluppo in LaTeX di Valerio Lacagnina (25/11/2013)

1. Definizione di valore assoluto

Sia x un qualsiasi numero reale, definiamo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Il numero reale non negativo $|x|$ si denomina *valore assoluto* di x.

1.1. Proprietà del valore assoluto. Sono evidenti le seguenti proprietà:

a: $|x| = |-x|$
b: $x \leq |x|$
c: $-x \leq |x|$

Sia a un numero reale non negativo, dimostriamo che:

d: $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$

Infatti, da $|x| \leq a \Rightarrow \begin{cases} x \leq a & \text{per} \quad x \geq 0 \\ -x \leq a & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow -a \leq x \leq a$

Siano x e y due numeri reali. Sussistono le seguenti proprietà

e: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Applicando la proprietà (**b**)

$$x \leq |x|$$

$$y \leq |y|$$

addizionando membro a membro si ottiene

$$x + y \leq |x| + |y| \tag{1}$$

Applicando la proprietà (**c**)

$$-x \leq |x|$$

$$-y \leq |y|$$

addizionando

$$-(x + y) \leq |x| + |y|$$

da cui moltiplicando primo e secondo membro per -1, si ottiene

$$(x + y) \geq -(|x| + |y|) \tag{2}$$

Essendo la (1) e la (2) entrambe vere, da esse segue

$$-(|x| + |y|) \leq (x + y) \leq |x| + |y|$$

Richiamando la proprietà (**d**), segue l'asserto $|x+y| \leq |x|+|y|$. c.v.d.

f: $|x-y| \geq ||x|-|y||$
Da $|x| = |(x-y)+y|$ per la proprietà (**e**) si ottiene

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$$

da cui

$$|x| - |y| \leq |x-y| \tag{3}$$

Da

$$|y| = |(y-x)+x| \leq |y-x| + |x| = |x-y| + |x|$$

si deduce

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \tag{4}$$

Dalle disequazioni (2) e (3) si deduce

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$$

Utilizzando la proprietà (**d**)

$$||x| - |y|| \leq |x-y|$$

o equivalentemente

$$|x-y| \geq ||x| - |y||$$

c.v.d.

g: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Quindi le proprietà viste possono essere riassunte in

a: $|x| = |-x|$
b: $x \leq |x|$
c: $-x \leq |x|$
d: $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$
e: $|x+y| \leq |x| + |y|$
f: $|x-y| \geq ||x| - |y||$
g: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Indice